Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 9
Abgabe: 17.01.2023, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Betrachte $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

(a) Bestimme den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

(b) Bestimme explizit das Minimalpolynom von $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ über $\mathbb{Q}$. (Warum ist das vorgeschlagene Polynom irreduzibel?)

Schließe daraus, dass $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Beschreibe das Gitter aller Teilkörper des endlichen Körpers $\mathbb{F}_{2^{30}}$ mit den entsprechenden Inklusionen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Sei p eine Primzahl und betrachte $K = \bigcup_{1 \leq n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$.

(a) Zeige, dass K ein perfekter Körper ist.

(b) Gib eine optimale obere Schranke für den Grad eines beliebigen irreduziblen Polynoms über K an.

(c) Beschreibe damit alle algebraischen Körpererweiterungen von K.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**
Sei $k \subset K$ eine beliebige Körpererweiterung positiver Charakteristik p.

(a) Zeige, dass die Teilmenge $k^{\text{ins}} = \{x \in K \mid x^{p^e} \in k \text{ für ein } e \text{ aus } \mathbb{N}\}$ ein Teilkörper von K ist.

(b) Zeige, dass k^{ins} perfekt ist, wenn K perfekt ist. Insbesondere ist $k^{\text{ins}} \subset K$ separabel.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.